MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 2
1.11.2019

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Lösungsvorschlag-

1. a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Wir müssen die Richtigkeit der Aussage

$$P: \quad \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$$

beweisen. Es ist

$$\begin{aligned} & 0 \leq (a-b)^2 \qquad \text{(wahre Aussage!)} \\ \iff & 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \\ \iff & 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \\ \iff & \frac{4ab}{a+b} \leq a + b \\ \iff & \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}, \end{aligned}$$

aber da

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{a}{ab} + \frac{b}{ab}} = \frac{2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

ist, ist damit die Aussage P bewiesen (statt des Äquivalenzpfeils $\iff$ hätte oben auch der einfache Folgepfeil $\implies$ für den Beweis von P gereicht!).

b) Die durchschnittliche Geschwindigkeit ist der Wert

$$\frac{\text{insgesamt zurückgelegte Strecke}}{\text{insgesamt benötigte Zeit}}.$$

In der ersten Stunde, in der er mit a km/h gefahren ist, hat der Fahrradfahrer a km zurückgelegt, entsprechend in der zweiten Stunde b km. Seine durchschnittliche Geschwindigkeit beträgt also

$$\frac{a \text{ km} + b \text{ km}}{2 \text{ h}} = \frac{a+b}{2} \text{ km/h}.$$

c) Wir kennen die Länge der Strecke den Berg hinauf nicht, also bezeichnen wir sie mit einer Variable, s km. Wegen

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeit}} \quad \implies \quad \text{Zeit} = \frac{\text{Strecke}}{\text{Geschwindigkeit}}$$

benötigt der Fahrradfahrer für die Fahrt aufwärts dann eine Zeit von

$$\frac{s \text{ km}}{a \text{ km/h}} = \frac{s}{a} \text{ h}$$

und für die Fahrt abwärts entsprechend eine Zeit von

$$\frac{s \text{ km}}{b \text{ km/h}} = \frac{s}{b} \text{ h}.$$

Weil er insgesamt die Strecke $2s$ km zurücklegt, beträgt seine durchschnittliche Geschwindigkeit also

$$\frac{2s\text{ km}}{\frac{s}{a}\text{ h}+\frac{s}{b}\text{ h}}=\frac{2s}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}}\text{ km/h}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\text{ km/h}.$$

2. a) Wir zeigen die erste Aussage:

$$\forall\, z\in\mathbb{Z} \quad : \quad \big[A(z) \implies B(z)\big]$$

Sei $z\in\mathbb{Z}$ und z ungerade. Zu zeigen ist: z^2+2z+3 ist gerade.
Weil $z\in\mathbb{Z}$ ungerade ist, gibt es nach Definition 1.14 b) ein $k\in\mathbb{Z}$ mit $z=2k+1$. Es folgt dann mit Hilfe der binomischen Formel

$$\begin{aligned} z^2+2z+3 &= (2k+1)^2+2(2k+1)+3\\ &= 4k^2+4k+1+4k+2+3\\ &= 4k^2+8k+6\\ &= 2(\underbrace{2k^2+4k+3}_{\in\mathbb{Z}}). \end{aligned}$$

Damit ist z^2+2z+3 nach Definition 1.14 a) gerade.
Wir zeigen nun die zur zweiten Aussage

$$\forall\, z\in\mathbb{Z} \quad : \quad \big[B(z) \implies A(z)\big]$$

äquivalente Aussage

$$\forall\, z\in\mathbb{Z} \quad : \quad \big[\neg A(z) \implies \neg B(z)\big].$$

Sei $z\in\mathbb{Z}$ und z nicht ungerade, also gerade. Zu zeigen ist: z^2+2z+3 ist ungerade.
Weil $z\in\mathbb{Z}$ gerade, gibt es nach Definition 1.14 b) ein $k\in\mathbb{Z}$ mit $z=2k$. Es folgt dann mit Hilfe der Binomischen Formel

$$\begin{aligned} z^2+2z+3 &= (2k)^2+2(2k)+3\\ &= 4k^2+4k+3\\ &= 4k^2+4k+2+1\\ &= 2(\underbrace{2k^2+2k+1}_{\in\mathbb{Z}})+1. \end{aligned}$$

Damit ist z^2+2z+3 nach Definition 1.14 b) ungerade.

b) Wir zeigen die Aussage:

$$\forall\, z\in\mathbb{Z} \quad : \quad \big[A(z) \implies C(z)\big]$$

Sei $z\in\mathbb{Z}$ ungerade.

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Def. 1.14b)}}{\implies} && \exists\, k\in\mathbb{Z} \;:\; z=2k+1\\ &\implies && z^2+z+1 = (2k+1)^2+(2k+1)+1\\ &&& = 4k^2+4k+1+2k+1+1\\ &&& = 4k^2+6k+2+1\\ &&& = 2(\underbrace{2k^2+3k+1}_{\in\mathbb{Z}})+1.\\ &\overset{\text{Def. 1.14b)}}{\implies} && z^2+z+1 \text{ ist ungerade.} \end{aligned}$$

Die Aussage

$$\forall\, z\in\mathbb{Z} \quad : \quad \big[C(z) \implies A(z)\big]$$

ist falsch, denn für z.B. $z=2$ ist $z^2+z+1=4+2+1=7$ ungerade (also gilt $C(2)$), aber die Aussage $A(2)$ ist falsch, denn $z=2$ ist gerade.

3. a) Die Negationen von P_1 und P_2 lauten

$$\neg P_1 \;:\quad \forall x \in M \quad \exists y \in M \;:\; x > y,$$
$$\neg P_2 \;:\quad \exists y \in M \quad \forall x \in M \;:\; x > y,$$

b) Die Aussage P_1 ist im Fall $M = \mathbb{N}$ **wahr**, denn:
Wähle $x = 1$. Dann gilt in der Tat für alle $y \in \mathbb{N}$, daß $x = 1 \leq y$.

Die Aussage P_1 ist im Fall $M = \mathbb{Z}$ **falsch**, also $\neg P_1$ ist wahr, denn:
Sei $x \in \mathbb{Z}$. Dann gilt mit der Wahl von $y := x - 1$, daß $x > x - 1 = y$.

Die Aussage P_2 ist für jede Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ **wahr**, also insbesondere für $M = \mathbb{N}$ und $M = \mathbb{Z}$, denn:
Sei $y \in M$. Dann gilt mit der Wahl von $x := y$, daß $x \leq x = y$.

4. a) Es ist

$$A \subset B \implies 5 \in \{8, a+1, 4\} \implies 5 = a + 1 \implies a = 4.$$

Aus $a = 4$ folgt, daß $B = \{8, 5, 4\}$ und $A = \{5, 4, 2x\}$, also, wegen $A \subset B$, daß $x \in \{4, 2.5, 2\}$.
Zusammenfassend gilt also

$$A \subset B \implies a = 4 \;\wedge\; x \in \{2, 2.5, 4\}.$$

Da zudem auch

$$\begin{aligned} a = 4 \;\wedge\; x \in \{2, 2.5, 4\} &\implies \Big(A = \{4,5\} \vee A = \{4,5,8\}\Big) \;\wedge\; B = \{8,4,5\} \\ &\implies A \subset B, \end{aligned}$$

ist also

$$A \subset B \iff a = 4 \;\wedge\; x \in \{2, 2.5, 4\}.$$

b) i) Es ist $N = \{3, 0, -1, 0, 3, 8\} = \{-1, 0, 3, 8\}$

ii) Es ist

$$\begin{aligned} M \cup N &= \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 8\} \\ M \cap N &= \{-1, 0, 3\} \\ N \backslash M &= \{8\} \\ M \backslash N &= \{-2, 1, 2, \}. \end{aligned}$$

iii) Es ist

$$\begin{aligned} \{(x,y) \in M \times N \mid x < y\} = \big\{&(-2,-1), (-2,0), (-2,3), (-2,8), \\ &(-1,0), (-1,3), (-1,8), (0,3), (0,8), \\ &(1,3), (1,8), (2,3), (2,8), (3,8)\big\}. \end{aligned}$$